**SUCCESSIONI**

NOTAZIONE: Sia n0

N

ES.

* **SUCCESSIONE**

DEFINIZIONE: Sia A un insieme. Una SUCCESSIONE in un insieme A è una funzione f: N 🡪 A.

Per indicare l’immagine di un elemento n ovvero per indicare f(n) si usa la notazione an=f(n) e per indicare la successione, si usa la notazione

ES. A=N f: N 🡪 N tale che f(n)= 2n ⩝nN

a7= f(7)= 14

an= 2n ⩝nN

Abbiamo una successione

ES. A=Q f: N 🡪 Q tale che f(n)=

Cioè

a0=1 a1= ½ a2= 1/3 a3= ¼ …

ES. an:= non ci può essere lo 0 al denominatore

* **SUCCESSIONE**

DEFINIZIONE: Sia A un insieme e sia n0

Una SUCCESSIONE in un insieme A è una funzione . Per indicare si usa la notazione (ricordiamo che )

ES.

tale che

* **SUCCESSIONE DEFINITA PER RICORRENZA**

DEFINIZIONE: Una successione si dice definita PER RICORRENZA o RICORSIVAMENTE se si definiscono i valori iniziali per n iniziale di un certo e si definisce una regola per determinare i valori an con in termine dei valori precedenti alla successione.

ES.

ES.

f2= f1+f0= 1

f3= f2+f1= 2

ES. (PROGRESSIONEGEOMETRICA)

Siano fissati. Definiamo ponendo

Se ad esempio prendiamo d=3 e x=5

a0=5 a1=15 a2=45 a3=135 …

ES. (PROGRESSIONE ARITMETICA)

Siano fissati. Definiamo ponendo

Se ad esempio prendiamo d=3 e x=5

a0=5 a1=8 a2=11 a3=14 …

ES. Sia tale che

Il valore di an è n!(n fattoriale)= n(n-1)(n-2)…\*3\*2\*1 (per

0!=1 1!=1 2!=2 3!=6 4!=24

* **FORMULA CHIUSA**

La FORMULA CHIUSA di una successione definita per ricorrenza è una formula che esprime direttamente il termine n-esimo an nella successione in funzione di n (e non in funzione di termini precedenti della successione)

ES.

a0=0 a1=0+1 a2=1+2 a3=3+4

è definita per ricorrenza e ammette come formula chiusa la successione tale che

ES.

Siano

Sia tale che

Sia tale che

a0=x a1=dx a2=da1=d a3=da2=d

verifichiamo mediante il principio di induzione che è la formula chiusa di , cioè che P(n): an=bn è vera

PASSO BASE: Dobbiamo dimostrare che P(0): a0=b0 è vera

a0= x per definizione

🡪a0=b0🡪P(0) è vera

b0=

Cioè ak=bk=

PASSO INDUTTIVO: dobbiamo dimostrare che se P(k): ak=bk è vera, allora P(k+1): ak+1=bk+1 è vera.

(vogliamo dimostrare che )

ak=bk=

🡪P(k+1) è vera

🡪Anche il passo induttivo è verificato

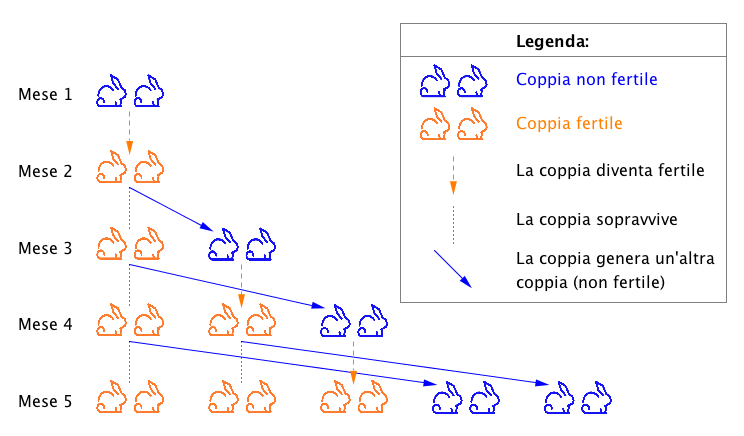
Perciò essendo verificati il passo base e il passo induttivo il principio di induzione ci assicura che P(n) è vera cioè è formula chiusa di

ES. (NUMERI DI FIBONACCI)

I numeri di Fibonacci sono definiti ricorsivamente dalle successioni

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| f1 | f2 | f3 | f4 | f5 | f6 | f7 | f8 | … |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | … |

Definiamo la crescita di una popolazione di conigli sotto queste ipotesi:

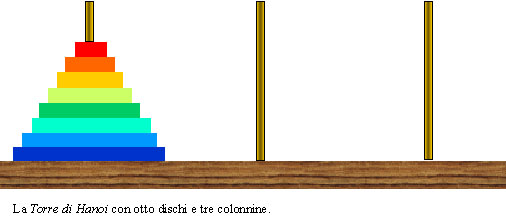
1. Una coppia di conigli diventa fertile dopo un mese e procrea un’altra coppia dopo un altro mese;
2. Al mese 0 non abbiamo coppie, al primo mese abbiamo una coppia ma non è matura;
3. I conigli non muoiono mai;

|  |  |
| --- | --- |
| MESE | COPPIE |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 non matura |
| 2 | 1 matura |
| 3 | 1 1 |
| 4 | 1 1 1 |
| 5 | 1 1 1 1 1 |

Ad ogni mese abbiamo le coppie del mese precedente (fn-1) più nuove coppie (che equivalgono alle coppie fertili al mese n-1, che equivalgono a quelle presenti al mese n-2, cioè fn-2) 🡪 fn=fn-1+fn-2

ESERCIZIO

Provare che la successione dei numeri di Fibonacci ammette come formula chiusa la successione

ES (LE TORRI DI HANOI)

REGOLE:

- Si può spostare un disco alla vota;

- Ogni disco non può mai essere appoggiato su un disco di diametro inferiore;

Qual è il numero minimo di mosse?

|  |  |
| --- | --- |
| Se n=0 | 0 mosse |
| Se n=1 | 1 mossa |
| Se n=2 | 3 mosse |
| Se n=3 | 7 mosse |

Sia an il numero di mosse

a3= a2+1an= 2a2+1

Sia

Dimostriamo che è formula chiusa di , cioè che la proposizione P(n): an=bn è vera .

Procediamo per induzione su .

PASSO BASE: Proviamo che P(0): a0=b0 è vera

a0=0

🡪P(0) è vera

b0=

PASSO INDUTTIVO: proviamo che se P(k): ak=bk è vera, allora P(k+1): ak+1=bk+1 è vera.

Per ipotesi induttiva ak=bk

🡪P(k+1) è vera

Poiché passo base e passo induttivo sono verificati per il principio di induzione si ha che P(n): an=bn è vero .

Perciò ammette come formula chiusa la successione

ESERCIZIO esame

Sia la successione data da

Dimostrare mediante il principio di induzione che ammette come formula chiusa la successione

Dimostrare che è formula chiusa per equivale a dimostrare che la proposizione P(n): an=bn è vera

Procediamo per induzione in :

1. PASSO BASE: Dobbiamo dimostrare che P(0):a0=b0 è vera

🡪P(0) è vera

a0=7

b0=

1. PASSO INDUTTIVO: (dobbiamo usare il principio di induzione nella seconda forma perché an dipende da 2 elementi precedenti della successione)

Perciò dobbiamo provare che

* Se P(h) è vera 🡪 cioè P(0), P(1),…,P(n) son tutte vere🡪cioè ah=bh ⩝h=0,…,k)
* Allora P(k+1) è vera.

Dimostriamo 2 casi:

-se k=0

🡪se k=0 P(k+1): è vera

-se k perciò k+1

🡪è vera

🡪il passo induttivo è anch’esso verificato

1. Poiché passo base e passo induttivo sono verificati, il principio di induzione ci assicura che P(n): an=bn è vera . Quindi ammette

**SOMMATORIA**

Sia una successione e siano n,m con

Poniamo

* **PROPRIETà**

1. la successione data dalla somma di q🡪q+q+q+q+q+…+q= (n+1)q

Es.

a0 a1 a2 a3



* **ESEMPIO IMPORTANTE**

ESERCIZI.

Dimostrare che

Procediamo per induzione su e dimostriamo che la proposizione è vera.

PASSO BASE: dimostriamo che è vera.

* P(0) è vera

PASSO INDUTTIVO: , supponiamo che P(k) sia vera e dimostriamo che P(k+1) è vera, dove

🡪P(n+1) è vera

(CONCLUSIONE) Poiché passo base e passo induttivo sono verificati il principio di induzione ci assicura che è vera

ESERCIZIO

Stabilire se si ha

Procediamo per induzione su e dimostriamo che la proposizione è vera .

PASSO BASE: Proviamo che P(0) è vera.

* P(0) è vera

PASSO INDUTTIVO: sia arbitraria, dobbiamo dimostrare che se è vera

allora è vera

🡪P(t+1) è verificato

🡪Il passo induttivo è verificato

Poiché avevamo verificato già la veridicità del passo base, il principio di induzione ci assicura che proposizione è vera .

ESERCIZIO (28/10/2020)

Stabilire se la successione definita per ricorrenza da ammette come formula chiusa la successione , dove

ammette come formula chiusa se e sono se an=bn .

Procediamo per induzione su e dimostriamo che la proposizione è vera .

PASSO BASE: Dimostriamo che P(0) è vera. P(0): a0=b0

a0= 0

* P(0) è vera

b0= 0(2\*0+3)= 0

PASSO INDUTTIVO: dimostriamo che

è vera

allora è vera.

è vera

🡪 è vera

(CONCLUSIONE) Poiché passo base e passo induttivo sono entrambi verificati il principio di induzione ci assicura che è vera , cioè che ammette come formula chiusa.

* **a DIVIDE b**

DEFINIZIONE: Siano a, b, c . Diciamo che a DIVIDE b (oppure che b è DIVISIBILE PER a, a è DIVISORE DI b, b è MULTIPLO di a) se

In tal caso scriveremo , se a non divide b, scriveremo .

a b b c a

ES. 5/80, infatti 80= 16\*5

ES. (a divide ogni suo multiplo)

b c

ES. infatti 0= 0\*a

PROPOSIZIONE: Siano a, b, c

Allora

(cioè c divide ogni combinazione lineare di a e b)

c a b

x y

ES. 7/42 e 7/21

Allora 7/1243\*42-74\*21

ESERCIZIO Dimostrare mediante il principio di induzione che

Sia

PASSO BASE: Proviamo che è vera.

P(0) è vera

7/ 7/(+6) => 7/7

PASSO INDUTTIVO: dimostriamo che se P(k) è vera allora P(k+1) è vera.

IPOTESI: TESI:

7c d

🡪 è vera

🡪il passo induttivo è verificato

(CONCLUSIONE): Poiché passo base e passo induttivo sono entrambi verificati il principio di induzione ci garantisce che P(n) è vera , cioè che

OSSERVAZIONE: Avremmo potuto trattare il passo induttivo come segue:

7c d

🡪 …

ESERCIZIO (11/02/2020)

Dimostrare mediante il principio di induzione che

Sia

PASSO BASE: dimostriamo che è vera

P(0) è vera

PASSO INDUTTIVO: : . Supponiamo che è vera e dimostriamo che è vera.

IPOTESI:

TESI:

🡪

🡪 è vera

🡪Passo induttivo è anch’esso verificato.

Poiché passo base e passo induttivo sono entrambi verificati allora è vera per il principio di induzione.

ESERCIZIO

Dimostrare che si ha che

Procediamo per induzione su .

PASSO BASE: dimostriamo che l’affermazione è vera per n=0, cioè che

l’affermazione è vera per n=0

Poiché 8/0 (infatti 0 = 0\*8) allora

PASSO INDUTTIVO: proviamo che se allora

IPOTESI:

TESI:

🡪

🡪

Poiché passo base e passo induttivo sono verificati il principio di induzione ci assicura che

ESERCIZIO (14/01/2020)

Dimostrare che

Procediamo per induzione su

PASSO BASE: proviamo che (cioè l’uguaglianza deve essere verificato per n=0)

🡪il passo base è verificato

PASSO INDUTTIVO: proviamo che (IPOTESI)

Allora (TESI)

🡪

🡪il passo induttivo è verificato

🡪Per il principio di induzione, l’uguaglianza .

ESERCIZIO

Dimostrare che si ha

Sia e procediamo per induzione su

PASSO BASE: Dimostriamo che P(0) è vera.

🡪P(0) è vera

PASSO INDUTTIVO: dimostriamo che se è vera

Allora è vera.

🡪P(k+1) è vera

🡪Il passo induttivo è verificato

Perciò, per il principio di induzione, P(n) è vera cioè .

ESERCIZIO

Sia dato da

Sia

Dimostrare che è formula chiusa per

Dobbiamo provare che an=bn

Poniamo P(n): an=bn e procediamo per induzione su

PASSO BASE: proviamo che P(0): a0=b0 è vera.

a0= 1

bo= 3\*0+1= 1

🡪P(0) è vera

PASSO INDUTTIVO: proviamo che

Se P(h) è vera

(cioè P(0),P(1),…,P(k) sono vere)

Allora P(k+1) è vera

P(h): ah=bh P(k+1): ak+1=bk+1

Distinguiamo 2 casi:

* se k=0 🡪

* a1=b1🡪 P(1) è vera

(P(k+1) con k=0)

* se k 1🡪

🡪ak+1=bk+1🡪P(k+1) è vera

🡪il passo induttivo è verificato

(CONCLUSIONE): poiché passo base e passo induttivo sono entrambi verificati la proposizione P(n): an=bn è vera cioè è formula chiusa per